

## Aplikovaná matematika v praxi

---



**Mgr. Jozef Kiseľák, PhD.**

21. november 2013

Ústav matematických vied, PF UPJŠ v Košiciach

# Úvod

Čo sa odo mňa očakávalo:

# Úvod

Čo sa odo mňa očakávalo:

- Vzdelanie - technické, prírodné vedy, ekonomické.

# Úvod

Čo sa odo mňa očakávalo:

- Vzdelanie - technické, prírodné vedy, ekonomické.
- Jazykové znalosti.

# Úvod

Čo sa odo mňa očakávalo:

- Vzdelanie - technické, prírodné vedy, ekonomické.
- Jazykové znalosti.
- Analytické myslenie.

# Úvod

Čo sa odo mňa očakávalo:

- Vzdelanie - technické, prírodné vedy, ekonomické.
- Jazykové znalosti.
- Analytické myslenie.
- Samostatnosť.

# Úvod

Čo sa odo mňa očakávalo:

- Vzdelanie - technické, prírodné vedy, ekonomické.
- Jazykové znalosti.
- Analytické myslenie.
- Samostatnosť.
- Soft-skills.

# Úvod

Náplň práce:



# Úvod

Náplň práce:

- Vývoj a zavádzanie nových produktov, inovácia a ošetrovanie existujúcich produktov.

# Úvod

## Náplň práce:

- Vývoj a zavádzanie nových produktov, inovácia a ošetrovanie existujúcich produktov.
- Matematické modelovanie poistných produktov.

# Úvod

## Náplň práce:

- Vývoj a zavádzanie nových produktov, inovácia a ošetrovanie existujúcich produktov.
- Matematické modelovanie poistných produktov.
- Implementácia matematických modelov a tlačových dokumentov.

# Úvod

## Náplň práce:

- Vývoj a zavádzanie nových produktov, inovácia a ošetrovanie existujúcich produktov.
- Matematické modelovanie poistných produktov.
- Implementácia matematických modelov a tlačových dokumentov.
- Štatistické analýzy dát a profit testing.

# Úvod

## Náplň práce:

- Vývoj a zavádzanie nových produktov, inovácia a ošetrovanie existujúcich produktov.
- Matematické modelovanie poistných produktov.
- Implementácia matematických modelov a tlačových dokumentov.
- Štatistické analýzy dát a profit testing.
- Projekt EURO-konverzie (systém VIS, integračné testovanie).

# Úvod

Čo som sa musel "doučiť":

# Úvod

Čo som sa musel "doučiť":

- Anglická terminológia v danej oblasti.

# Úvod

Čo som sa musel "doučiť":

- Anglická terminológia v danej oblasti.
- Legislatíva súvisiaca s danou problematikou.



# Úvod

Čo som sa musel "doučiť":

- Anglická terminológia v danej oblasti.
- Legislatíva súvisiaca s danou problematikou.
- IT záležitosti.

# Úvod

Čo som sa musel "doučiť":

- Anglická terminológia v danej oblasti.
- Legislatíva súvisiaca s danou problematikou.
- IT záležitosti.
- Spolupráca s inými oddeleniami.

# VP/MS

Softvér VP/MS - Visual Product Modeling System (Poistovne, banky, IT firmy, atď.).  
AXA, Generali a UNIQA.

# VP/MS

Softvér VP/MS - Visual Product Modeling System (Poistovne, banky, IT firmy, atď.).  
AXA, Generali a UNIQA.

- Systémové požiadavky.

# VP/MS

Softvér VP/MS - Visual Product Modeling System (Poistovne, banky, IT firmy, atď.).  
AXA, Generali a UNIQA.

- Systémové požiadavky.
- Nezávislosť od platformy.

# VP/MS

Softvér VP/MS - Visual Product Modeling System (Poistovne, banky, IT firmy, atď.).  
AXA, Generali a UNIQA.

- Systémové požiadavky.
- Nezávislosť od platformy.
- Jednoduché používanie.

# VP/MS

Softvér VP/MS - Visual Product Modeling System (Poistovne, banky, IT firmy, atď.).  
AXA, Generali a UNIQA.

- Systémové požiadavky.
- Nezávislosť od platformy.
- Jednoduché používanie.
- Excelovský typ "jazyka"

# VP/MS

Softvér VP/MS - Visual Product Modeling System (Poistovne, banky, IT firmy, atď.).  
AXA, Generali a UNIQA.

- Systémové požiadavky.
- Nezávislosť od platformy.
- Jednoduché používanie.
- Excelovský typ "jazyka"
- Flexibilita modularizácie.



# VP/MS

Softvér VP/MS - Visual Product Modeling System (Poistovne, banky, IT firmy, atď.).  
AXA, Generali a UNIQA.

- Systémové požiadavky.
- Nezávislosť od platformy.
- Jednoduché používanie.
- Excelovský typ "jazyka"
- Flexibilita modularizácie.
- Výstup pužiteľný priamo v eclipse.

# VP/MS

Softvér VP/MS - Visual Product Modeling System (Poistovne, banky, IT firmy, atď.).  
AXA, Generali a UNIQA.

- Systémové požiadavky.
- Nezávislosť od platformy.
- Jednoduché používanie.
- Excelovský typ "jazyka"
- Flexibilita modularizácie.
- Výstup pužiteľný priamo v eclipse.
- Hladšia komunikácia medzi kompetentnými oddeleniami.

# VP/MS

Najdôležitejšie súčasti modelu:

Modelár nemusí riešiť dátové typy premenných, či priradzovanie uloženému priestoru.

Neinicializované a prepísané premenné, nekonečné cykly, zle ukazujúce smerníky v pamäti, a pod. nie sú možné.

# VP/MS

Najdôležitejšie súčasti modelu:

- products

Modelár nemusí riešiť dátové typy premenných, či priradzovanie uloženému priestoru.

Neinicializované a prepísané premenné, nekonečné cykly, zle ukazujúce smerníky v pamäti, a pod. nie sú možné.

# VP/MS

Najdôležitejšie súčasti modelu:

- products
- components

Modelár nemusí riešiť dátové typy premenných, či priradzovanie uloženému priestoru.

Neinicializované a prepísané premenné, nekonečné cykly, zle ukazujúce smerníky v pamäti, a pod. nie sú možné.

# VP/MS

Najdôležitejšie súčasti modelu:

- products
- components
- attributes (vstupy)

Modelár nemusí riešiť dátové typy premenných, či priradzovanie uloženému priestoru.

Neinicializované a prepísané premenné, nekonečné cykly, zle ukazujúce smerníky v pamäti, a pod. nie sú možné.

# VP/MS

Najdôležitejšie súčasti modelu:

- products
- components
- attributes (vstupy)
- functions

Modelár nemusí riešiť dátové typy premenných, či priradzovanie uloženému priestoru.

Neinicializované a prepísané premenné, nekonečné cykly, zle ukazujúce smerníky v pamäti, a pod. nie sú možné.

# VP/MS

Najdôležitejšie súčasti modelu:

- products
- components
- attributes (vstupy)
- functions
- tables

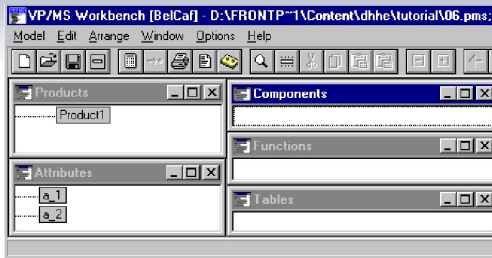
Modelár nemusí riešiť dátové typy premenných, či priradzovanie uloženému priestoru.

Neinicializované a prepísané premenné, nekonečné cykly, zle ukazujúce smerníky v pamäti, a pod. nie sú možné.



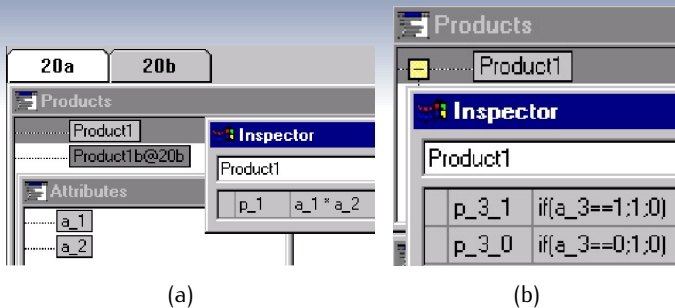
# VP/MS

## Samotné modelovanie - VP/MS Workbench



Obr. 1: VP/MS Workbench

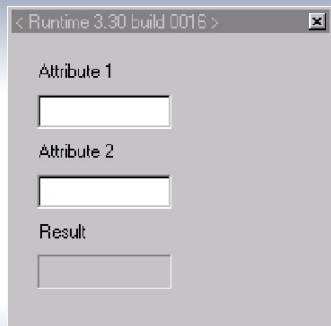
# VP/MS



Obr. 2: VP/MS Workbench

# VP/MS

Modely poskytnuté aplikáciám - pomocou tzv. VP/MS Runtime environment



Obr. 3: VP/MS Runtime

<https://www.generali.sk/online-poistenie/>

# Príklad - model ŽP

Pri modelovaní ŽP vychádzame z dvoch základných princípov.

# Príklad - model ŽP

Pri modelovaní ŽP vychádzame z dvoch základných princípov.

- **Princíp fiktívneho súboru:**

Počet osôb uzatvárajúcich vo veku  $x$  ten istý typ poistnej zmluvy je  $l_x$ , pričom predpokladáme, že všetci sa narodili 1. januára a zomreli 31. decembra.

# Príklad - model ŽP

Pri modelovaní ŽP vychádzame z dvoch základných princípov.

- **Princíp fiktívneho súboru:**

Počet osôb uzatvárajúcich vo veku  $x$  ten istý typ poistnej zmluvy je  $I_x$ , pričom predpokladáme, že všetci sa narodili 1. januára a zomreli 31. decembra.

- **Princíp ekvivalencie:**

Pri uzatváraní súboru poistných zmlúv toho istého typu musia byť v rámci súboru všetky príjmy poisťovne (plynúce z poistného) v rovnováhe s jej výdavkami (očakávané poistné plnenia), keď príjmy a výdavky sa diskontujú k spoločnej časovej základni (k dátumu uzatvorenia poistnej zmluvy).

## Príklad - model ŽP

- $x$  je vek osoby ( $x \leq \omega$ )
- $l_x$  počet osôb dožívajúcich sa veku  $x$
- $d_x = l_x - l_{x+1}$  je počet tých, ktorí zomrú vo veku  $x$
- $p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$  je pravdepodobnosť dožitia veku  $x + 1$
- $q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$  je pravdepodobnosť úmrtia vo veku  $x$
- ${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$  je pravdepodobnosť dožitia veku  $x + n$
- ${}_n q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$  je pravdepodobnosť úmrtia pred dosiahnutím veku  $x + n$

<http://portal.statistics.sk/showdoc.do?docid=33032>

# Príklad - model ŽP

## Komutačné čísla

- $D_x = l_x v^x$  - diskontovaný počet dožívajúcich sa veku  $x$

- $$N_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} D_{x+k}$$

- $$S_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} N_{x+k}$$

- $C_x = d_x v^{x+1}$  - diskontovaný počet zomrelých vo veku  $x$

- $$M_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} C_{x+k}$$

- $$R_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} M_{x+k}$$



# Príklad - model ŽP

Poistenie pre prípad dožitia:

# Príklad - model ŽP

Poistenie pre prípad dožitia:

- osoba vo veku  $x$  uzavrie tento typ poistenia na dobu  $n$  rokov

# Príklad - model ŽP

Poistenie pre prípad dožitia:

- osoba vo veku  $x$  uzavrie tento typ poistenia na dobu  $n$  rokov
- vyplatenie poistnej sumy, ak sa poistený dožije veku  $x + n$

## Príklad - model ŽP

Poistenie pre prípad dožitia:

- osoba vo veku  $x$  uzavrie tento typ poistenia na dobu  $n$  rokov
- vyplatenie poistnej sumy, ak sa poistený dožije veku  $x + n$
- ${}_xE_n$  - suma, ktorú poisťník musí zaplatiť, aby mu na konci poistnej doby poisťovňa vyplatila 1 €

# Príklad - model ŽP

Poistenie pre prípad dožitia:

- osoba vo veku  $x$  uzavrie tento typ poistenia na dobu  $n$  rokov
- vyplatenie poistnej sumy, ak sa poistený dožije veku  $x + n$
- ${}_x E_n$  - suma, ktorú poisťník musí zaplatiť, aby mu na konci poistnej doby poisťovňa vyplatila 1 €
- princíp ekvivalencie -  ${}_x E_n l_x v^x = l_{x+n} v^{x+n}$

## Príklad - model ŽP

Poistenie pre prípad dožitia:

- osoba vo veku  $x$  uzavrie tento typ poistenia na dobu  $n$  rokov
- vyplatenie poistnej sumy, ak sa poistený dožije veku  $x + n$
- ${}_x E_n$  - suma, ktorú poisťník musí zaplatiť, aby mu na konci poistnej doby poisťovňa vyplatila 1 €
- princíp ekvivalencie -  ${}_x E_n I_x v^x = I_{x+n} v^{x+n}$

Platí

$${}_x E_n = \frac{D_{x+n}}{D_x},$$

$${}_x E_n = E[Z] = {}_n p_x \cdot v^n + {}_n q_x \cdot 0 = \frac{D_{x+n}}{D_x},$$

kde

$$Z = \begin{cases} 1 \cdot v^n, & \text{s pravd. } {}_n p_x \\ 0, & \text{s pravd. } {}_n q_x \end{cases}.$$

# Príklad - model ŽP

Dočasné poistenie pre prípad smrti:

# Príklad - model ŽP

Dočasné poistenie pre prípad smrti:

- osoba vo veku  $x$  uzavrie tento typ poistenia na dobu  $n$  rokov



# Príklad - model ŽP

Dočasné poistenie pre prípad smrti:

- osoba vo veku  $x$  uzavrie tento typ poistenia na dobu  $n$  rokov
- vyplatenie poistnej sumy, ak poistený zomrie do veku  $x + n$

## Príklad - model ŽP

Dočasné poistenie pre prípad smrti:

- osoba vo veku  $x$  uzavrie tento typ poistenia na dobu  $n$  rokov
- vyplatenie poistnej sumy, ak poistený zomrie do veku  $x + n$
- $A_{x:n}$  - suma, ktorú poistník musí zaplatiť, aby pri smrti poisteného poisťovňa vyplatila 1 € oprávneným osobám

## Príklad - model ŽP

Dočasné poistenie pre prípad smrti:

- osoba vo veku  $x$  uzavrie tento typ poistenia na dobu  $n$  rokov
- vyplatenie poistnej sumy, ak poistený zomrie do veku  $x + n$
- $A_{xn}$  - suma, ktorú poistník musí zaplatiť, aby pri smrti poisteného poisťovňa vyplatila 1 € oprávneným osobám
- princíp ekvivalencie -  $A_{xn} l_x = d_x v + \dots + d_{x+n-1} v^n$

## Príklad - model ŽP

Dočasné poistenie pre prípad smrti:

- osoba vo veku  $x$  uzavrie tento typ poistenia na dobu  $n$  rokov
- vyplatenie poistnej sumy, ak poistený zomrie do veku  $x + n$
- $A_{xn}$  - suma, ktorú poistník musí zaplatiť, aby pri smrti poisteného poisťovňa vyplatila 1 € oprávneným osobám
- princíp ekvivalencie -  $A_{xn} l_x = d_x v + \dots + d_{x+n-1} v^n$

Platí

$$A_{xn} = \frac{C_x + \dots + C_{x+n-1}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x},$$

$$A_{xn} = E[Z] = \sum_{j=0}^{n-1} v^{j+1} P(k_x = j) = \sum_{j=0}^{n-1} v^{j+1} j p_x q_{x+j} = \sum_{j=0}^{n-1} v^{j+1} \frac{d_{x+j}}{l_x},$$

kde

$$Z = \begin{cases} 1 \cdot v^{k_x}, & k_x = 0, 1, \dots, n-1 \\ 0, & k_x \geq n \end{cases}.$$

# Príklad - model ŽP

Zmiešané poistenie:

# Príklad - model ŽP

Zmiešané poistenie:

- osoba vo veku  $x$  uzavrie tento typ poistenia na dobu  $n$  rokov

# Príklad - model ŽP

Zmiešané poistenie:

- osoba vo veku  $x$  uzavrie tento typ poistenia na dobu  $n$  rokov
- vyplatenie poistnej sumy, ak poistený zomrie do veku  $x + n$

# Príklad - model ŽP

Zmiešané poistenie:

- osoba vo veku  $x$  uzavrie tento typ poistenia na dobu  $n$  rokov
- vyplatenie poistnej sumy, ak poistený zomrie do veku  $x + n$
- vyplatenie poistnej sumy, ak sa poistený dožije veku  $x + n$



# Príklad - model ŽP

Zmiešané poistenie:

- osoba vo veku  $x$  uzavrie tento typ poistenia na dobu  $n$  rokov
- vyplatenie poistnej sumy, ak poistený zomrie do veku  $x + n$
- vyplatenie poistnej sumy, ak sa poistený dožije veku  $x + n$
- $A_{x,n}$  - jedorázové netto poistné

# Príklad - model ŽP

Zmiešané poistenie:

- osoba vo veku  $x$  uzavrie tento typ poistenia na dobu  $n$  rokov
- vyplatenie poistnej sumy, ak poistený zomrie do veku  $x + n$
- vyplatenie poistnej sumy, ak sa poistený dožije veku  $x + n$
- $A_{x,n}$  - jedorázové netto poistné
- princíp ekvivalencie -  $A_{x,n} l_x = d_x v + \dots + d_{x+n-1} v^n + l_{x+n} v^n$

## Príklad - model ŽP

Zmiešané poistenie:

- osoba vo veku  $x$  uzavrie tento typ poistenia na dobu  $n$  rokov
- vyplatenie poistnej sumy, ak poistený zomrie do veku  $x + n$
- vyplatenie poistnej sumy, ak sa poistený dožije veku  $x + n$
- $A_{x,n}$  - jedorázové netto poistné
- princíp ekvivalencie -  $A_{x,n} l_x = d_x v + \dots + d_{x+n-1} v^n + l_{x+n} v^n$

Platí

$$A_{x,n} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x},$$

kde

$$Z = \begin{cases} 1 \cdot v^k, & k_x = 0, 1, \dots, n-1 \\ 1 \cdot v^n, & k_x \geq n \end{cases}.$$

# Príklad - model ŽP

Ročne platené netto poistné:

- Prípad poistenia dožitia:

$$P_{xn}^1 = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

- Prípad doč. poistenia smrti:

$$P_{xn} = \frac{M_x}{N_x - N_{x+n}}$$

- Prípad zmiešaného poistenia:

$$P_{x,n} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

# Príklad - model ŽP

## Príklad

*Poistenec má  $x = 25$  rokov, chce sa poistiť na  $n = 10$  rokov s  $PS = 100000$ , pričom technická úroková miera je  $i = 3\%$ .*

- *jednorázové poistné -  $A_{x,n} = 0.76587231 \cdot PS$*
- *ročné poistné je -  $P_{x,n} = 0.08046249 \cdot PS$*

# Príklad - model ŽP

## Náklady

- Jednorázové počiatkové náklady  $\alpha$  (hlavne provízia) : 3% - 5% z poistnej sumy
- Správne náklady  $\beta$  : 3‰ - 8‰ z poistnej sumy
- Inkasné náklady  $\gamma$  : 1% - 10% z brutto poistného

Označme  ${}_x B_n$  ako ročné brutto poistné pre zmiešaný typ poistenia.

$$(1 - \gamma) {}_x B_n = P_{x,n} + \alpha \frac{D_x}{N_x - N_{x+n}} + \beta$$

a teda

$${}_x B_n = \frac{1}{1 - \gamma} \left( \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} + \alpha \frac{D_x}{N_x - N_{x+n}} + \beta \right).$$

# Príklad - model ŽP

## Príklad

*Poistenec má  $x = 25$  rokov, chce sa poistiť na  $n = 10$  rokov s  $PS = 10000$ , pričom technická úroková miera je  $i = 3\%$ .*

- *ročné netto poistné je -  $P_{x,n} = 0.08046249 \cdot PS$*
- *ročné brutto poistné je -  $P_{x,n} = \frac{1}{1-\gamma} (0.08046249 \cdot PS + \tilde{\alpha} + \beta)$*

# Koniec

Ďakujem za pozornosť !